Concours Centrale - Supélec 1995

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Option M, P'

On appelle f, g et h les fonctions d'une variable réelle x définies par :

$$f(x) = \int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\ dt$$

$$g(x) = \int_0^1 \frac{t^{1-x}}{\sqrt{1+t}}\ dt$$

$$h(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(2-x)} + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k-1}\ \frac{1\cdot 3\ldots(2k-3)}{2^k k!}\ \frac{1}{k+1-x}$$

Partie I -

I.A -

I.A.1) Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.

I.A.2) Quel est le sens de variation de f ?

I.A.3) Quelles sont les limites de f aux bornes de D ? Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1 dans D (on pourra introduire la différence $\sqrt{1+t}-1$).

I.B -

I.B.1) On suppose $x<0$. En utilisant une intégration par parties, établir une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

I.B.2) Calculer $f(0)$ et $f(-1)$.

I.B.3) Calculer $f(-1/2)$ et $f(1/2)$.

I.B.4) Donner des valeurs approchées de $f(0)$, $f(-1)$, $f(-1/2)$ et $f(1/2)$ à la précision $5\cdot 10^{-4}$.

I.B.5) Représenter graphiquement les variations de f.

I.C -

I.C.1) Déterminer le domaine de définition de la fonction g.

I.C.2) Montrer que la fonction g est indéfiniment dérivable dans l'intervalle $]-\infty, 1[$ et exprimer, pour tout entier n strictement positif, $g^{(n)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

I.C.3) n étant un entier positif, on pose $I_n = \int_0^1 (-\ln t)^n dt$. Calculer I_n.

I.C.4) Montrer que la fonction g est développable en série entière dans l'intervalle $]-1, 1[$.

I.D -

I.D.1) Pour $x \in D$, exprimer $f(x)$ en fonction de $g(x)$.

I.D.2) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

I.D.3) Montrer que f admet un développement en série entière dont on précisera le rayon de convergence.

Partie II -

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \int_0^1 t^{n-x}(1+t)^{\frac{1}{2}-n}\ dt$.

II.A - Déterminer le domaine de définition de la fonction f_n ainsi définie et établir une relation entre $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

II.B -

II.B.1) Montrer que, pour $x<1$, $f(x)$ est la somme d'une série de fonctions de la forme

$$u_n(x) = \frac{c_n}{(1-x)(2-x)\ldots(n+1-x)}$$

$(n \geq 0)$ dont on déterminera les coefficients c_n en fonction de n.

II.B.2) Soit $x_0<1$, montrer que la série précédente converge uniformément sur l'intervalle $]-\infty, x_0]$.

II.C -

II.C.1) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, f admet un développement aymptotique au voisinage de $-\infty$, de la forme

$$\frac{d_1}{x} + \ldots + \frac{d_n}{x^n}.$$

II.C.2) Calculer les coefficients d_1, d_2 et d_3 (on pourra utiliser la relation établie en I.B.1).

Partie III -

III.A -

III.A.1) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on pose :

$$a_k = (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-3)}{2^k k!}$$

En utilisant, pour $u < 1$, l'inégalité $\ln(1-u) \leq -u$, montrer que :

$$|a_k| \leq \left(\frac{2}{k+1}\right)^{3/2}$$

III.A.2) On développe en série entière la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$. Montrer, en justifiant l'intégration terme à terme, qu'on peut écrire pour $x < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(2-x)} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1-x}$$

III.B -

III.B.1) Déterminer le domaine de définition E de la fonction h.

III.B.2) Montrer que h est indéfiniment dérivable dans E.

III.B.3) Étudier les variations de h dans l'intervalle $]1, 2[$.

III.C -

III.C.1) Étudier le signe de h'' dans l'intervalle $]2, 3[$.

III.C.2) En déduire les variations de h' et de h dans ce même intervalle. On précisera aussi le signe de h.

III.C.3) Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction h pour $x < 3$.

••• FIN •••